- Árvores Abrangentes de Menor Custo
    - Definições Elementares
    - Correcção do Algoritmo de Prim
    - Algoritmo de Kruskal

Aula 13

Algoritmo de Prim

Prim(G, w, r)

```
for each v ∈ G.V
   v.key = ∞; v.π = Nil
r.key := 0;
A := ∅
let Q be a min-priority queue with content G.V
while Q ≠ []
   let u = ExtractMin(Q)
   if (u ≠ r) A := A ∪ { (u.π , u) }
   for each v ∈ G.Adj[u]
      if (v.key > w(u,v)) && v ∈ Q
         v.key := w(u,v); v.π := u
```

Análise da Correcção

I1 $A = \{ (v.\pi, v) \mid v \notin Q \wedge v.\pi \neq Nil \}$ é um subconjunto de uma MST

I2 $\forall u \in Q.$

$u.key = \min \{ w(u,v) \mid v \in V \setminus Q \}$

I3 $\forall v \in V.$

$v.\pi \neq Nil \Rightarrow w(v.\pi, v) = v.key$

Invariante do Algoritmo de Prim

I_1 $A = \{ (v.\pi, v) \mid v \notin Q \wedge v.\pi \neq Nil \}$
é um subconjunto de uma MST

I_2 $\forall u \in Q.$
$u.key = \min \{ w(u,v) \mid v \in V \setminus Q \}$

I_3 $\forall v \in V.$
$v.\pi \neq Nil \Rightarrow w(v.\pi, v) = v.key$

Inicialização (fim da primeira iteração)

I_1 $A = \emptyset$ é subconjunto de uma MST ✓

I_2 $V \setminus Q = \{r\}$

$\forall v \in N(r).\ v.key = w(r, v)$
$\forall v \notin N(r).\ v.key = \infty$ ✓

I_3

$v.\pi \neq Nil \Leftrightarrow v.\pi = r$
$\Leftrightarrow v.key = w(r, v)$ ✓

Invariante do Algoritmo de Prim

(I1) $A = \{ (v.\pi, v) \mid v \notin Q \wedge v.\pi \neq Nil \}$
é um subconjunto de uma MST

(I2) $\forall u \in Q.$
$u.key = \min \{ w(u,v) \mid v \in V \setminus Q \}$

(I3) $\forall v \in V.$
$v.\pi \neq Nil \Rightarrow w(v.\pi, v) = v.key$

Manutenção

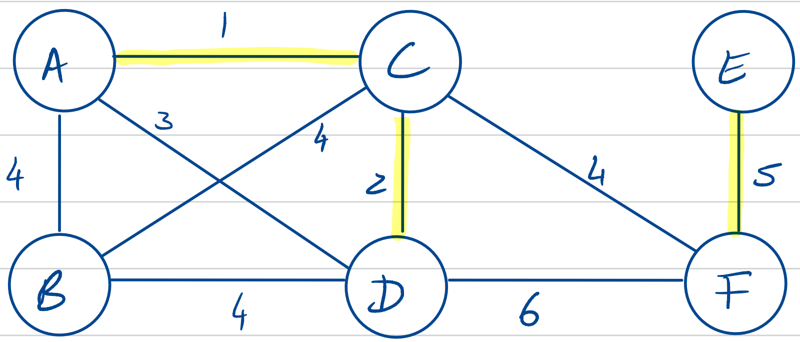
(I1) $A' = A \cup \{ (u.\pi, u) \}$

- Há que provar que A' tb é um subconjunto de uma MST.

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Definição [Arco Seguro]

Seja A um subconjunto de uma MST de um grafo $G = (V, E, T)$, um arco (u, v) diz-se seguro (safe) para A sse $A \cup \{(u, v)\}$ tb é um subconjunto de uma MST de G.



- Exemplo:

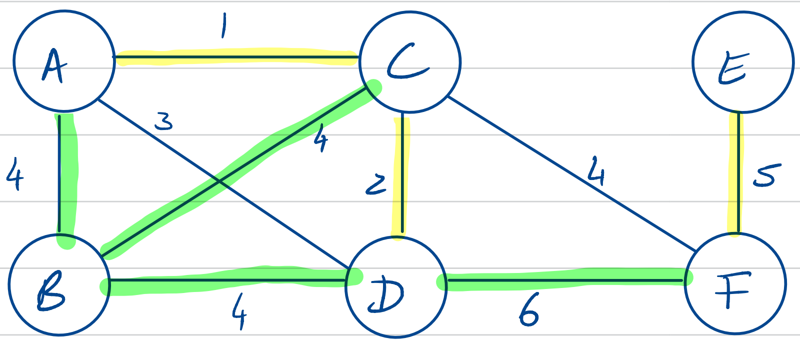
$A = \{ (A, C), (C, D), (E, F) \}$

Quem são os arcos seguros para A?

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Definição [Arco Seguro]

Seja A um subconjunto de uma MST de um grafo $G=(V,E,T)$, um arco (u,v) diz-se seguro (safe) para A sse $A \cup \{(u,v)\}$ tb é um subconjunto de uma MST de G.



- Exemplo:

$A = \{ (A,C), (C,D), (E,F) \}$

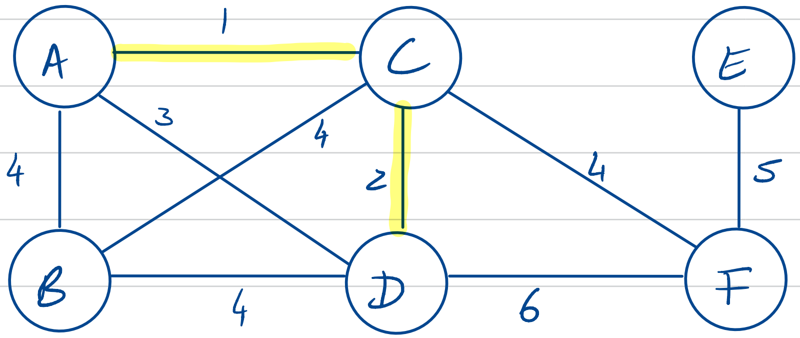
Quem são os arcos seguros para A?

Problema: Como identificar arcos seguros?

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Definição [Corte que respeita A]

Seja $(S, V \setminus S)$ um corte num grafo $G = (V, E, w)$ e A um subconjunto de uma MST de G; $(S, V\setminus S)$ respeita A sse nenhum arco de A cruza $(S, V\setminus S)$.



- $A = \{(A,C), (C,D)\}$

Definição [Arco leve q cruza o corte]

Um arco (u,v) diz-se leve para $(S, V\setminus S)$ sse (u,v) atravessa o corte e:

$$w(u,v) = \min\{ w(x,y) \mid (x,y) \text{ atravessa } (S, V \setminus S)\}$$

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

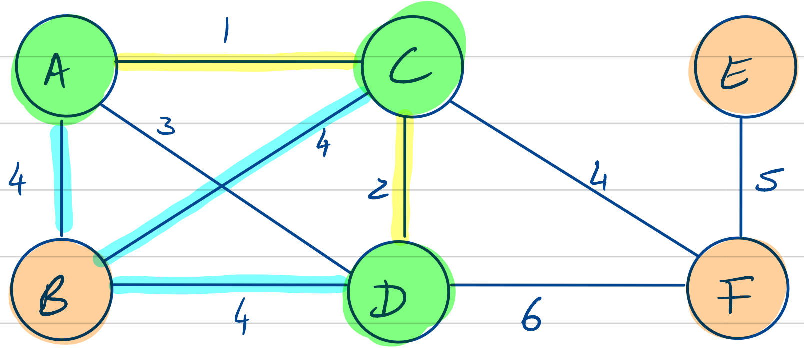
Definição [Corte que respeita A]

Seja $(S, V\setminus S)$ um corte num grafo $G=(V,E,w)$ e A um subconjunto de uma MST de G; $(S, V\setminus S)$ respeita A sse nenhum arco de A cruza $(S, V\setminus S)$.

Definição [Arco leve q cruza o corte]

Um arco (u,v) diz-se leve para $(S, V\setminus S)$ sse (u,v) atravessa o corte e:

$$w(u,v) = \min\{ w(x,y) \mid (x,y) \text{ atravessa } (S, V\setminus S)\}$$



- $A = \{(A,C), (C,D)\}$
- $S = \{A, C, D\}$
- Arcos leves que cruzam o corte:
  - (A,B)
  - (B,C)
  - (B,D)

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Teorema [Arco Leve $\Rightarrow$ Arco Seguro]

Dados $G=(V,E,w)$ um grafo não-dirigido pesado, A um subconjunto de uma MST de G e $(S, V\setminus S)$ um corte que respeita A;
então:

$$(u,v) \text{ é arco leve para } (S, V\setminus S) \Rightarrow (u,v) \text{ é seguro para } A$$

Prova:

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Teorema [Arco Leve $\Rightarrow$ Arco Seguro]

Dados $G=(V,E,w)$ um grafo não-dirigido pesado, A um subconjunto de uma MST de G e $(S, V\setminus S)$ um corte que respeita A; então:

$$(u,v) \text{ é arco leve para } (S, V\setminus S) \Rightarrow (u,v) \text{ é seguro para } A$$

Prova:

- Suponhamos que:
  - $A \subseteq T$ e T é MST de G
  - $(S, V\setminus S)$ respeita A
  - (u,v) é arco leve para A

  Há que mostrar que (u,v) é seguro para A. Isto é, existe uma MST T' tal que: $A \subseteq T'$ e $(u,v) \in T'$.

- Se $(u,v) \in T$, não há nada a provar.

- Suponhamos que $(u,v) \notin T$.

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Teorema [Arco Leve ⇒ Arco Seguro]

Dados $G=(V,E,w)$ um grafo não-dirigido pesado, A um subconjunto de uma MST de G e $(S, V\setminus S)$ um corte que respeita A;
então:

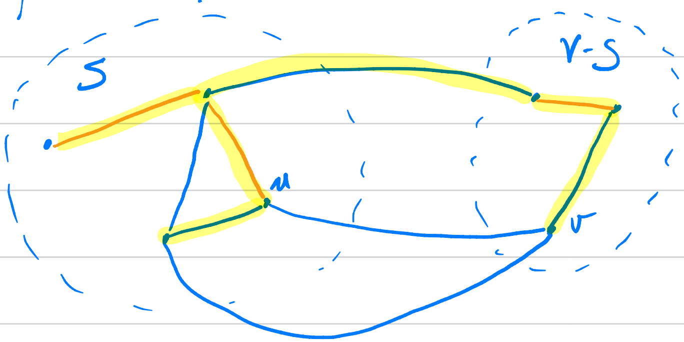
$$(u,v) \text{ é arco leve para } (S, V\setminus S) \Rightarrow (u,v) \text{ é seguro para } A$$

Prova:

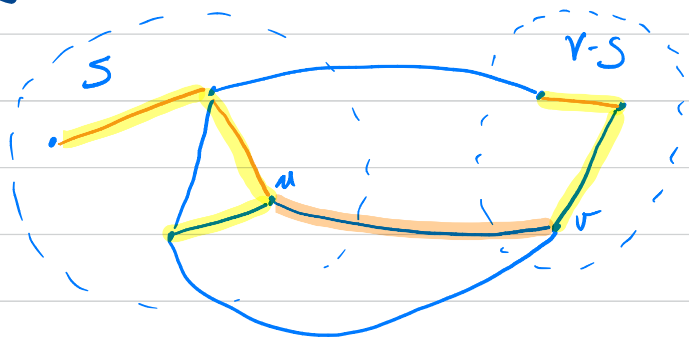
- Suponhamos que $(u,v) \notin T$.

- amarelo - T
- laranja - A

T



Cut and paste



T'

T' é MST de G

Árvores Abrangentes de Menor Custo - Definições Elementares

Teorema [Arco Leve ⇒ Arco Seguro]

Dados $G=(V,E,w)$ um grafo não-dirigido pesado, A um subconjunto de uma MST de G e $(S, V\setminus S)$ um corte que respeita A;

então:

$$(u,v) \text{ é arco leve para } (S, V\setminus S) \Rightarrow (u,v) \text{ é seguro para } A$$

Prova:

- $T = \hat{T} \cup \{(x,y)\}$ e (x,y) cruza o corte

- Seja $T' = \hat{T} \cup \{(u,v)\}$

$$\begin{aligned} w(T') &= w(\hat{T}) + w(u,v) \\ &\leq w(\hat{T}) + w(x,y) \\ &= w(T) \end{aligned}$$

Com T é MST, concluímos que $w(T') = w(T)$ e T' é MST.

Invariante do Algoritmo de Prim (continuação)

(I1) $A = \{ (v.\pi, v) \mid v \notin Q \wedge v.\pi \neq Nil \}$
é um subconjunto de uma MST

(I2) $\forall u \in Q.$
$u.key = \min \{ w(u,v) \mid v \in V \setminus Q \}$

(I3) $\forall v \in V.$
$v.\pi \neq Nil \Rightarrow w(v.\pi, v) = v.key$

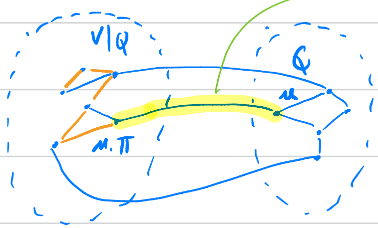
Manutenção

(I1) $A' = A \cup \{ (u.\pi, u) \}$

- Há que provar que $(u.\pi, u)$ é seguro para A

- Temos de encontrar um corte $(S, V \setminus S)$ que respeita A e para o qual $(u.\pi, u)$ seja <u>leve</u>.

- $(V \setminus Q, Q)$ respeita A



$(u.\pi, u)$ é arco leve q cruza $(V \setminus Q, Q)$
↳ <u>Invariante 2</u>